§ 5. ДВЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

Используя дифференциальные уравнения движения материальной точки в той или другой системе координат, можно решать две основные задачи динамики точки.

Первая задача. *Зная массу точки и ее закон движения, можно найти действующую на точку силу.* Действительно, если, например, заданы уравнения движения точки в декартовой системе координат

$$x=f_1(t); \quad y=f_2(t); \quad z=f_3(t),$$

то проекции силы на оси координат определяются из дифференциальных уравнений движения точки (9), т. е.

$$F_x=m\frac{d^2x}{dt^2}=m\frac{d^2f_1}{dt^2}; \quad F_y=m\frac{d^2y}{dt^2}=m\frac{d^2f_2}{dt^2}; \quad F_z=m\frac{d^2z}{dt^2}=m\frac{d^2f_3}{dt^2}.$$

Зная проекции силы на координатные оси, легко определить модуль силы и косинусы углов силы с осями координат.

Пример 1. Точка M, имеющая массу m (рис. 5), движется в плоскости Oxy так, что уравнениями ее движения являются

$$x=a\cos kt; \quad y=b\sin kt,$$

где a, b, k — постоянные положительные величины; t — время.

Определить силу, под действием которой точка совершает это движение.

Решение. Найдем уравнение траектории точки в координатной форме, исключая время из уравнений движения:

$$x^2/a^2+y^2/b^2=\cos^2 kt+\sin^2 kt=1.$$

Траекторией точки является эллипс с полуосями a и b.

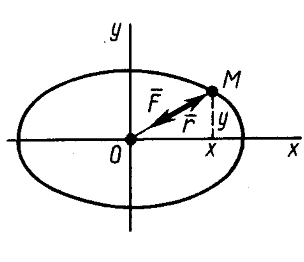

Рис. 5

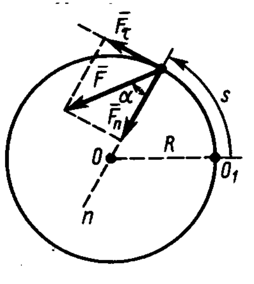

Рис. 6

На основании дифференциальных уравнений движения точки (10)

$$F_x=m\frac{d^2x}{dt^2}=-mk^2a\cos kt; \quad F_y=m\frac{d^2y}{dt^2}=-mk^2b\sin kt$$

или, если ввести координаты движущейся точки,

$$F_x=-mk^2x; \quad F_y=-mk^2y;$$

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=mk^2\sqrt{x^2+y^2}=mk^2r,$$

где r — радиус-вектор движущейся точки. Косинусы углов силы $\bar{F}$ с осями координат

$$\cos(\bar{F}, \hat{\ } x)=F_x/F=-x/r; \quad \cos(\bar{F}, \hat{\ } y)=F_y/F=-y/r.$$

Отсюда можно заключить, что сила $\bar{F}$ имеет направление, противоположное радиусу-вектору $\bar{r}$.

Окончательно

$$\bar{F}=-mk^2\bar{r}.$$

Пример 2. Точка M, имеющая массу m (рис. 6), движется из состояния покоя по окружности радиусом R с постоянным касательным ускорением a_τ. Определить действующую на точку силу в момент, соответствующий пройденному точкой по траектории расстоянию $s=R\sqrt{2}$.

Решение. Применяя дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси, имеем:

$$F_\tau=ma_\tau; \quad F_n=m\frac{v^2}{R}; \quad F_b=0.$$

Так как движение происходит с постоянным касательным ускорением a_τ без начальной скорости, то

$$v=a_\tau t; \quad s=a_\tau t^2/2.$$

Тогда

$$F_\tau=ma_\tau; \quad F_n=m\frac{a_\tau^2t^2}{R}; \quad F=\sqrt{F_\tau^2+F_n^2}=ma_\tau\sqrt{1+a_\tau^2t^4/R^2}.$$

В момент, когда $s=R\sqrt{2}=a_\tau t^2/2$, $a_\tau t^2/R=2\sqrt{2}$ и, следовательно, $a_\tau^2t^4/R^2=8$,

$$F=a_\tau m\sqrt{1+8}=3ma_\tau.$$

Тангенс угла α между радиусом окружности и силой $\bar{F}$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{F_\tau}{F_n}=\frac{ma_\tau}{ma_\tau^2t^2/R}=\frac{R}{a_\tau t^2}=\frac{R}{2\sqrt{2}R}=\sqrt{2}/4.$$

Из рассмотрения первой задачи динамики точки видно, что по заданной массе точки и уравнениям ее движения сила полностью определяется как по величине, так и по направлению.

Вторая задача. *По заданной массе и действующей на точку силе необходимо определить движение этой точки.* Рассмотрим решение этой задачи в прямоугольной декартовой системе координат. В общем случае сила $\bar{F}$, а следовательно, и ее проекции на координатные оси могут зависеть от времени, координат движущейся точки, ее скорости, ускорения и т. д. Для простоты ограничимся случаем зависимости силы и ее

проекций на оси координат от времени, координат и скорости. Дифференциальные уравнения движения точки (9) имеют вид

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x(t;\, x,\, y,\, z;\, \dot{x},\, \dot{y},\, \dot{z}); \quad m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y(t;\, x,\, y,\, z;\, \dot{x},\, \dot{y},\, \dot{z});$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=F_x(t;\, x,\, y,\, z;\, \dot{x},\, \dot{y},\, \dot{z}). \qquad (9')$$

Для нахождения уравнений движения точки в декартовых координатах необходимо проинтегрировать систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение одного дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные. Для случая системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка имеется шесть произвольных постоянных: C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6.

Каждая из координат x, y, z движущейся точки после интегрирования системы уравнений (9) зависит от времени t и всех шести произвольных постоянных, т. е.

$$\left.\begin{aligned} x&=f_1(t;\, C_1,\, C_2,\, C_3,\, C_4,\, C_5,\, C_6);\\ y&=f_2(t;\, C_1,\, C_2,\, C_3,\, C_4,\, C_5,\, C_6);\\ z&=f_3(t;\, C_1,\, C_2,\, C_3,\, C_4,\, C_5,\, C_6).\end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Если продифференцировать уравнения (13) по времени, то определяются проекции скорости точки на координатные оси:

$$\left.\begin{aligned} v_x&=\dot{x}=f'_1(t;\, C_1,\, C_2,\, C_3,\, C_4,\, C_5,\, C_6);\\ v_y&=\dot{y}=f'_2(t;\, C_1,\, C_2,\, C_3,\, C_4,\, C_5,\, C_6);\\ v_z&=\dot{z}=f'_3(t;\, C_1,\, C_2,\, C_3,\, C_4,\, C_5,\, C_6).\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Таким образом, задание силы не определяет конкретного движения материальной точки, а выделяет целый класс движений, характеризующийся шестью произвольными постоянными. Действующая сила определяет только ускорение движущейся точки, а скорость и положение точки на траектории могут зависеть еще от скорости, которая сообщена точке в начальный момент, и от начального положения точки. Так, например, материальная точка, двигаясь вблизи поверхности Земли под действием силы тяжести, имеет ускорение $\bar{g}$, если не учитывать сопротивление воздуха. Но точка будет иметь различные скорости и положение в пространстве в один и тот же момент времени и различную форму траектории в зависимости от того, из какой точки пространства началось движение и с какой по величине и направлению начальной скоростью.

Для выделения конкретного вида движения материальной точки надо дополнительно задать условия, позволяющие определить произвольные постоянные, которых в общем случае будет шесть. В качестве таких условий обычно задают так

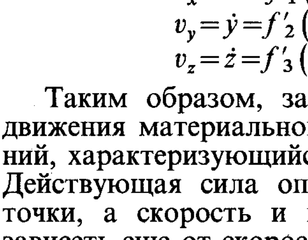

Рис. 7

называемые н а ч а л ь н ы е у с л о в и я, т. е. в какой-то определенный момент времени, например при $t=0$ (рис. 7), задают координаты движущейся точки x_0, y_0, z_0 и проекции ее скорости v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}:

$$\left.\begin{aligned} &x=x_0; \quad y=y_0; \quad z=z_0;\\ &\dot{x}=v_{0x}; \quad \dot{y}=v_{0y}; \quad \dot{z}=v_{0z}.\end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Используя эти начальные условия и формулы (13) и (14), получаем шесть следующих уравнений для определения шести произвольных постоянных:

$$\left.\begin{aligned} x_0&=f_1(0;\, C_1,\, C_2,\, C_3,\, C_4,\, C_5,\, C_6);\\ y_0&=f_2(0;\, C_1,\, C_2,\, C_3,\, C_4,\, C_5,\, C_6);\\ z_0&=f_3(0;\, C_1,\, C_2,\, C_3,\, C_4,\, C_5,\, C_6);\\ v_{0x}&=f'_1(0;\, C_1,\, C_2,\, ...,\, C_6);\\ v_{0y}&=f'_2(0;\, C_1,\, C_2,\, ...,\, C_6);\\ v_{0z}&=f'_3(0;\, C_1,\, C_2,\, ...,\, C_6).\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Если система уравнений (16) удовлетворяет условиям разрешимости, то из нее можно определить все шесть произвольных постоянных.

Начальные условия в форме (15) определяют единственное решение системы дифференциальных уравнений (9) при соблюдении соответствующих условий теории дифференциальных уравнений. Условия в других формах, как например, задание двух точек, через которые должна проходить траектория движущейся точки, могут дать или несколько решений, удовлетворяющих этих условиям, или не дать ни одного решения.

При движении точки в плоскости Oxy имеется два дифференциальных уравнения движения. В решения этих уравнений входят четыре произвольные постоянные. Постоянные определяются из начальных условий

$$t=0; \quad x=x_0; \quad y=y_0; \quad \dot{x}=v_{0x}; \quad \dot{y}=v_{0y}.$$

В случае прямолинейного движения точки имеется только одно дифференциальное уравнение и в его решение входят две произвольные постоянные. Для их определения необходимо задать начальные условия:

$$t=0; \quad x=x_0; \quad \dot{x}=v_{0x}.$$

Задача интегрирования системы дифференциальных уравнений (9′) при заданных начальных условиях в общем случае является довольно трудной. Даже в простейшем случае прямо-

линейного движения, когда имеется только одно дифференциальное уравнение, его решение удается выразить точно в квадратурах лишь при определенной зависимости силы от времени t, координаты x и скорости v. Поэтому важно определение таких соотношений из системы уравнений (9′), которые являются следствиями этой системы и в которые входят производные от координат точки только первого порядка. Такие соотношения, например, в виде $f(t;\, x,\, y,\, z;\, \dot{x},\, \dot{y},\, \dot{z})=C$ называют *первыми интегралами* системы дифференциальных уравнений (9′).

Если из системы (9′) удается найти три независимых первых интеграла, то задача интегрирования упрощается, так как вместо интегрирования системы дифференциальных уравнений второго порядка достаточно проинтегрировать систему трех дифференциальных уравнений первого порядка, которую представляют эти первые интегралы.

В дальнейшем будет рассмотрен способ получения первых интегралов дифференциальных уравнений движения точки из так называемых общих теорем динамики в некоторых частных случаях движения точки.

Для выяснения особенностей решения второй основной задачи динамики, имеющей прикладное значение, рассмотрим ее решение для случая как прямолинейного, так и криволинейного движения материальной точки.